C-IV /MOUVEMENT DANS LE PLAN
الحركات المستوية

Si la trajectoire appartient à un plan, il est possible de repérer la position d'un mobile soit par les coordonnées rectangulaires soit par les coordonnées polaires.

1/ ETUDE DU MOUVEMENT EN COORDONNEES POLAIRES
(دراسة الحركة بالإحداثيات القطبية) :

- **Position du mobile :** Soit M un point matériel dont la trajectoire est une courbe plane quelconque(C).

La position du mobile en **coordonnées cartésiennes**, comme nous l'avons déjà signalée est définie par :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}} \qquad \textbf{(21.4)}$$

Mais en **coordonnées polaires** le vecteur position s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r} \qquad \textbf{(22.4)}$$

Où : $\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta$

Donc : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r(\vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta)$

Remarque : et θ dépendent du temps : $r = f(t)$ et $\theta = g(t)$

- **La vitesse :**
  - ✓ **En coordonnées cartésiennes :**

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}} \qquad \textbf{(23.4)}$$

✓ **En coordonnées polaires** : D'après le figure 4.12 , nous pouvons écrire les expressions des deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{u}_\theta$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$:

$$\boxed{\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta \qquad ; \qquad \vec{u}_\theta = -\vec{i}.\sin\theta + \vec{j}.\cos\theta} \qquad \textbf{(24.4)}$$

Leurs dérivées consécutives sont :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\vec{i}.\sin\theta.\frac{d\theta}{dt} + \vec{j}\cos\theta.\frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_\theta.\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{u}_\theta.\frac{d\theta}{dt}}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{i}.\cos\theta.\frac{d\theta}{dt} - \vec{j}.\sin\theta.\frac{d\theta}{dt} = -\vec{u}_r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{u}_r\frac{d\theta}{dt}} \qquad \textbf{(4.25)}$$

A l'aide des relations (4.25), exprimons la vitesse en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\frac{dr}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \Leftrightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta} \qquad \textbf{(4.26)}$$

En conséquence, la vitesse a deux composantes, transversale $\vec{v}_\theta$ et radiale $\vec{v}$. Ci-dessous figurent les deux expressions des deux composantes ainsi que le module de la vitesse en coordonnées polaires :

$$\left.\begin{array}{l}\vec v = \dot r.\vec u_r + r.\dot\theta.\vec u_\theta \\ \vec v = \vec v_r + \vec v_\theta\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l}\vec v_r = \dot r.\vec u_r \\ \vec v_\theta = r.\dot\theta.\vec u_\theta\end{array} \Rightarrow v = \sqrt{\dot r^2 + (r.\dot\theta)^2}$$

- **L'accélération :**

En coordonnées rectangulaires : $\vec a = \dot{\vec v} = \ddot{\vec r} = \ddot x\vec i + \ddot y\vec j$

En coordonnées polaires : Nous dérivons la relation de la vitesse 4.26 par rapport au temps et en utilisant l'expression 4.25, nous obtenons la formule de l'accélération :

$$\vec a = \dot{\vec v} = \dot r.\frac{d\vec u_r}{dt} + \ddot r.\vec u_r + r.\dot\theta.\frac{d\vec u_\theta}{dt} + r.\ddot\theta.\vec u_\theta + \dot r.\dot\theta.\vec u_\theta$$

$$\vec a = \dot r.(\vec u_\theta.\frac{d\theta}{dt}) + \ddot r.\vec u_r + r.\dot\theta.(-\vec u_r\frac{d\theta}{dt}) + r.\ddot\theta.\vec u_\theta + \dot r.\dot\theta.\vec u_\theta$$

En ordonnant cette expression, et en utilisant la notation de Newton, on arrive à la formule définitive de l'accélération en coordonnées polaires :

$$\vec a = \dot r.\vec u_\theta.\dot\theta + \ddot r.\vec u_r + r.\dot\theta.(-\vec u_r\dot\theta) + r.\ddot\theta.\vec u_\theta + \dot r.\dot\theta.\vec u_\theta$$

$$\boxed{\vec a = (\underbrace{\ddot r - r.\dot\theta^2}_{a_r}).\vec u_r + (\underbrace{2\dot r.\dot\theta + r.\ddot\theta}_{a_\theta}).\vec u_\theta} \qquad \textbf{(4.27)}$$

Remarquons que l'accélération a deux composantes, radiale $\vec a$ et transversale $\vec a_\theta$:

$$\boxed{\vec a = \vec a_r + \vec a_\theta} \qquad \textbf{(4.28)}$$

Quant à son module il est égal à :

$$\boxed{a = \sqrt{(\ddot r - r.\dot\theta^2)^2 + (2\dot r.\dot\theta + r.\ddot\theta)^2}} \qquad \textbf{(4.29)}$$

- **Cas particulier, Le mouvement circulaire(حالة خاصة: الحركة الدائرية) :**

Puisque $r = R = C^{te}$, le vecteur vitesse est donc :

$$\boxed{\vec v = R\dot\theta\vec u_\theta} \qquad \textbf{(4.30)}$$

Et l'expression du vecteur accélération est :

$$\boxed{\vec a = -R.\dot\theta^2.\vec u_r + R.\ddot\theta\vec u_\theta} \qquad \textbf{(4.31)}$$

Remarquons que cette accélération a deux composantes :

- ✓ **Accélération normale (التسارع الناظمي)** notée par $\vec a_N$, portée par la normale, dirigée vers le centre , et de sens contraire à $\vec a$, elle indique la **variation de la direction** de la vitesse.

$$\boxed{\vec a_N = -\vec a_r = R\dot\theta^2\vec u_r \Rightarrow a_r = a_N = R\dot\theta^2} \qquad \textbf{(4.32)}$$

- ✓ **Accélération tangentielle (التسارع المماسي)** notée par $\vec a_T$, portée par la tangente à la trajectoire au point M , elle indique la **variation du module** de la vitesse.

$$\boxed{\vec a_\theta = \vec a_T = R\ddot\theta\vec u_\theta \Rightarrow a_\theta = a_T = R\ddot\theta} \qquad \textbf{(4.33)}$$

- **Autre cas particulier, le mouvement circulaire uniforme (الحركة الدائرية المنتظمة):**

  Pour ce mouvement la vitesse est constante en module. Et puisque $r = R = C^{te}$, la vitesse est donc :

$$\boxed{v = R\dot{\theta} = R\omega} \qquad \textbf{(4.34)}$$

  Nous reconnaissons la vitesse angulaire ω qui représente l'angle balayé par unité de temps et dont l'unité est le radian par seconde $\left(rad.s^{-1}\right)$.

  Quant à l'accélération elle vaut :

$$\boxed{a = a_r = a_N = R\dot{\theta}^2 = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow \vec{a}_N = -R\omega^2.\vec{u}_r} \qquad \textbf{(4.35)}$$

2/ LES COMPOSANTES NORMALE ET TANGENTIELLE DE LA VITESSE ET DE L'ACCELERATION DANS LE REPERE DE FRENET :

On considère maintenant un mouvement dont la trajectoire est une courbe plane quelconque (C) . Nous dessinons un repère composé de l'axe MT, tangent à la trajectoire au point M et porte le vecteur vitesse, et de l'axe MN perpendiculaire à l'axe MT.

Soient $\vec{u}_T$ et $\vec{u}_N$ les deux vecteurs unitaires suivant MT et MN respectivement. On remarque sur la figure 4.13 que la vitesse s'écrit alors:

$$\boxed{\vec{v} = v.\vec{u}_T} \qquad \textbf{(4.36)}$$

L'accélération s'écrit : $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

Donc :

$$\boxed{\vec{a} = a_T.\vec{u}_T + a_N.\vec{u}_N} \qquad \textbf{(4.37)}$$

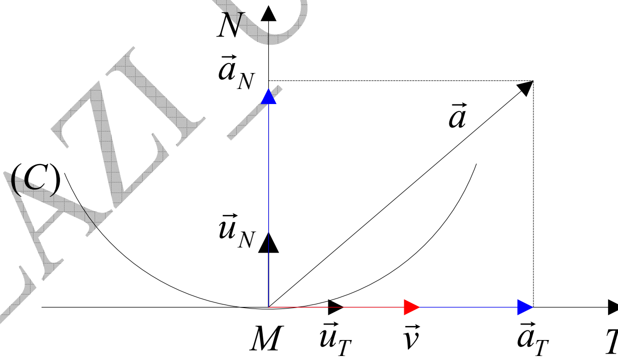


Fig 4.13: vitesse et accélération dans le repère Frenet

De ce qui précède, apparaît :

$$\left.\begin{array}{l} a_T = \dfrac{dv}{dt} \\ a_N = \dfrac{v^2}{R} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{a} = \dot{v}.\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}.\vec{u}_N \Rightarrow a = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

On appelle les expressions (4.36) et (4.37), respectivement les composantes de la vitesse et de l'accélération dans le repère de Frenet, ou les composantes propres, ou encore les composantes locales.

Si ds est le déplacement élémentaire il est tout à fait logique que le vecteur position est :

$$\boxed{\vec{r} = \int \vec{u}_T . ds} \qquad \textbf{(4.38)}$$

Pour clore ce chapitre, abordons l'exemple suivant :

Exemple 4.8 : La trajectoire plane d'un point matériel en coordonnées polaires est donnée par l'équation : $\rho . \cos^2 \frac{\varphi}{2} = a$, où a est une constante.

On suppose que le module v de la vitesse de ce point matériel est proportionnel à ρ : $v = k\rho$, où k est une constante positive.

Calculer les composantes normale v_ρ et transversale v_φ du vecteur vitesse.

Réponse :

On sait que : $\vec{v} = \dot{\rho} . \vec{u}_\rho + \rho\dot{\varphi} . \vec{u}_\varphi \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\varphi$

Remarquer que nous avons remplacé les lettres par ρ et θ par φ (le but : n'apprenez pas les lettres !!!).

Partant des données nous faisons les calculs suivants :

$$\rho \cos^2(\varphi/2) = a \Rightarrow \rho = \frac{a}{\cos^2(\varphi/2)}$$

En dérivant l'expression de ρ par rapport au temps, nous obtenons la vitesse normale v_ρ :

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} . \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow v_\rho = \frac{a . \cos(\varphi/2) . \sin(\varphi/2)}{\cos^4(\varphi/2)} . \dot{\varphi}$$

Quant à la vitesse transversale elle est :

$$v_\varphi = \rho . \dot{\varphi}$$

Mais $\dot{\varphi}$ reste inconnue. Pour cela il faut la calculer ce $\dot{\varphi}$ à partir de $v^2 = {v_\rho}^2 + {v_\varphi}^2$

D'après les données : $v^2 = k^2 . \rho^2 = k^2 . \dfrac{a^2}{\cos^4(\varphi/2)}$

Donc :

$$k^2 . \frac{a^2}{\cos^4(\varphi/2)} = \frac{a^2 . \sin^2(\varphi/2)}{\cos^6(\varphi/2)} . \dot{\varphi}^2 + \frac{a^2}{\cos^4(\varphi/2)} . \dot{\varphi}^2 \Rightarrow k^2 = \left[\frac{\sin^2(\varphi/2)}{\cos^2(\varphi/2)} + 1 \right] . \dot{\varphi}^2$$

D'où : $\dot{\varphi}^2 = k^2 . \cos^2(\varphi/2) \Rightarrow \dot{\varphi} = k . \cos(\varphi/2)$

En remplaçant $\dot{\varphi}$ par sa valeur littérale dans les deux composantes de la vitesse, on trouve ce qui est demandé :

$$v_\rho = \frac{a . k . \sin(\varphi/2)}{\cos^2(\varphi/2)} \Rightarrow \boxed{v_\rho = v . \sin(\varphi/2)}$$

$$\boxed{v_\theta = \frac{a . k}{\cos(\varphi/2)}}$$